Unidad III

Límites y continuidad

3.1 Límite de una sucesión.

Una sucesión tiene límite, si sus términos van tomando valores cada vez más próximos a una cierta cantidad que llamamos límite de la sucesión.

Una característica de esta cantidad es, que los términos de la sucesión nunca llegan a alcanzarla, a pesar de que pueden acercarse a ella tanto como queramos.

Expresado de una forma más precisa decimos que una sucesión an tiene límite j si la distancia de a a j se hace más pequeña que un valor que nosotros escojamos: e desde un término de la sucesión en adelante: lim an = j

3.2 Límite de una función de variable real.

Se llama *función real de variable real* a toda función definida de un subconjunto *D* de los números reales, en el conjunto **R** de los números reales, tal que a cada elemento *x* de *D* le corresponde uno y sólo un elemento *y* de **R**:

$$f: D \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = y$$

Para que una función quede correctamente definida es necesario determinar:

· El conjunto inicial o dominio de la función.

· El conjunto final o imagen de la función.

· La regla por la cual se asigna a cada elemento del conjunto origen un solo elemento del conjunto imagen.

3.3 Cálculo de límites.

A) INDETERMINACIÓN

$\infty - \infty$

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}\right)$$

En otros casos, sobre todo en aquellos en que aparecen radicales, basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$$

B) INDETERMINACIÓN

$0 \cdot \infty$

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x^2}\right)$$

C) INDETERMINACIÓN 0/0

Cuando solo aparecen funciones racionales, basta con descomponer factorialmente el numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$$

En aquellos casos en que aparecen funciones irracionales (radicales), basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$$

D) INDETERMINACIÓN

$$\frac{\infty}{\infty}$$

En la mayoría de los casos basta con dividir el numerador y denominador por la mayor potencia de x del denominador.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}$$

E) INDETERMINACIONES

∞^0
0^0
1^∞

Para determinar estos límites tendremos en cuenta que:

$$f(x)^{g(x)} = e^{Ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x) \cdot Ln(f(x))}$$

de donde resulta que:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \cdot Ln(f(x))}$$

pudiendo aparecer otras indeterminaciones, que resolveremos por los métodos anteriores o por métodos que aprenderemos en temas posteriores.

En el caso de la indeterminación 1^infinitopodemos aplicar con mayor facilidad la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \cdot (f(x) - 1)}$$

Aplicar la igualdad anterior a la resolución del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1+3x^2}{x^2}}$$

3.4 Propiedades de los límites.

$$\lim_{x\to a} k = k$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad si \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad si \quad f(x) > 0$$

$$\lim_{x\to a} g[f(x)] = g \lim_{x\to a} f(x)$$

g puede ser una raíz, un log, sen ,cos, tg, etc.

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \qquad \begin{array}{l}\text{Si n es impar} \\ \text{Si n es par } f(x) \geq 0\end{array}$$

$$\lim_{x\to a}[\log_a f(x)] = \log_a\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \qquad \text{Si } a>0 \text{ y } f(x) > 0$$

Límites de sucesiones

1 **El límite si existe es** único.

2 Si una sucesión **a_n** tiene **límite**, todas las **subsucesiones** tienen el mismo **límite** que **a_n**.

3 Todas las **sucesiones convergentes** están **acotadas**.

4 Hay **sucesiones acotadas** que no son c**onvergentes**.

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

5 Todas las **sucesiones monótonas** y **acotadas** son **convergentes**.

6 Hay sucesiones **convergentes** que **no son monótonas**.

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$\lim (a_n + b_n) = \lim (a_n) + \lim (b_n)$

$\lim (a_n - b_n) = \lim (a_n) - \lim (b_n)$

$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim (a_n) \cdot \lim (b_n)$

$\lim (a_n : b_n) = \lim (a_n) : \lim (b_n)$

$$\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$$

$\lim k\cdot a_n = k\cdot \lim a_n$

$\lim a_n^k = (\lim a_n)^k$

$\lim \log_a a_n = \log_a \lim a_n$

3.5 Límites laterales.

Se dice que la función y = f(x) tiene por límite l cuando x tiende hacia a, y se representa por

(Es decir, que si fijamos un entorno de l de radio, podemos encontrar un entorno de a de radio , que depende de , de modo que para cualquier valor de x que esté en el entorno E(a,) exceptuando el propio a, se tiene que su imagen f(a) está en el entorno E(l,).)

Límite infinito: (A partir de ahora usaremos la notación matemática para hacer más corta la definición). .

Límite por la izquierda: ----->

Límite por la derecha:<-----

3.6 Límites infinitos y límites al infinito.

El limite de una funcion f cuando x tiende aun numero a, no existira siempre que los valores de F(x) crece o decrece.

Esto es, si F(x) puede hacerse arbitrariamente grande al tomar el valor de x suficientemente cercano para diferente del numero a, tanto como pir la derecha como por la izquierda de a, entonces.

limF(x)=∞ limF(x)= -∞
x--> a x -->a

3.7 Asíntotas.

Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables (x o y) tienden al infinito.

Una definición más formal es:

<u>DEFINICIÓN</u>

Si un punto (x,y) se desplaza continuamente por una función y=f(x) de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de asíntota de la función.

Las asíntotas se clasifican en:

$$\text{Asíntotas}\begin{cases}\text{Verticales}\\ \text{Horizontales}\\ \text{Oblicuas}\end{cases}$$

y= f(x) tiene una asíntota vertical en x=a si

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

o alguno (o ambos) de los límites laterales vale
$\pm\infty$
. Es decir, puede haber asíntota vertical por la derecha, por la izquierda o por ambos lados. La posición de la curva respecto a la asíntota dependerá del signo de los límites laterales. Como ejemplo, determinar la asíntota vertical y su posición con respecto a la gráfica de la función

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$$

y = f(x) tiene una asíntota horizontal en y=b si

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

. La asíntota puede aparecer cuando
$x \longrightarrow +\infty,\ x \longrightarrow -\infty$ o en ambos casos.
La posición de la gráfica de la función respecto a la asíntota vertical se determina estudiando si el signo de f(x) - b es positivo o negativo cuando
$x \longrightarrow \pm\infty$
. Como ejemplo, determinar la asíntota horizontal y su posición con respecto a la gráfica de la función

$$y = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$$

Asíntotas oblicuas.
Dada la función y = f(x), si se verifica que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right) = h$$

entonces se dice que y = mx + h es una asíntota oblicua de dicha función para
$x \to \pm\infty$
. La asíntota puede aparecer cuando
$x \to +\infty,\ x \to -\infty$ o en ambos casos.
Para estudiar la posición de la gráfica de la función con respecto a la asíntota basta estudiar el signo de f(x)-(mx + h). Como ejemplo, determinar la asíntota oblicua y su posición con respecto a la gráfica de la función

$$y = \frac{3x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + 1}$$

3.8 Funciones continuas y discontinuas en un punto y en un intervalo.

Sean f(x) y g(x) dos funciones continuas en x=a, se tiene entonces que:

1. f(x) ± g(x)es continua en x=a.
2. f(x) * g(x) es continua en x=a.
3. f(x)/g(x)es continua en x=a si g(a) diferente 0 .
4. f(x)^g(x)es continua en x=a suponiendo que f(a)>0 (para que tenga sentido la potencia).

Si f(x) es continua en x=a y g(x) es continua en y=f(a) ---> (g º f)(x) es continua en x=a.

Demostración:

consideremos x------>f(x) = y ------------->g(y) siendo x------>g(y).
por se g continua en F(a) ---> dado E>0 si [y - f(a)] < s entonces [g(y) -g(f(a))] < E.

Discontinuidades.

Se dice que una función y = f(x) es ***discontinua en x = a*** si no es continua en dicho valor de x, es decir, no cumple alguna de las tres condiciones de continuidad.

3.9 Tipos de discontinuidades.

A) *Evitable*: Cuando existe el lim F(x) pero no coincide con el valor de f(a) por una de estas dos razones, son distintos los valores o no existe f(a).

B) *De salto*: Cuando existe el límite por la derecha y por la izquierda (siendo ambos finitos) pero no coinciden.

C) *Asintótica*: Cuando alguno de los límites laterales (o ambos) no es finito. Puede ser asintótica por la derecha, por la izquierda o por ambos lados.

D) *Esencial*: Cuando no existe alguno de los límites laterales (o ambos). Puede serlo por la derecha, por la izquierda o por ambos lados.

Si y = f(x) tiene una discontinuidad evitable en x = a, llamaremos ***verdadero valor de la función en x=a*** al lim f(x). Dicho valor es el que convierte a la función en continua.